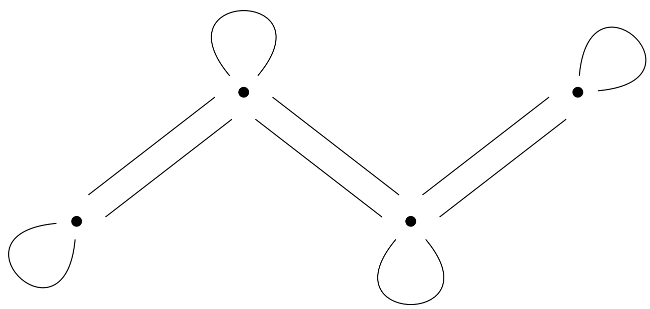
Groupoïdification

Louise LECLERC



Une promenade mathématique librement inspirée d'un post de John. C. BAEZ [2], et du travail des mathématiciens John C. BAEZ [3], Alexander E. HOFFNUNG et Christopher D. WALKER [4], Jeffrey MORTON [6] et Simon BYRNE [5].

1 Introduction à la catégorification

Cette excursion prend majoritairement place au pays des catégories, un domaine que se sont approprié les mathématiciens et plus particulièrement les algébristes depuis le siècle dernier. Il serait plus correct de dire que la théorie des catégories est un domaine d'envergure plus vaste, notamment logique, et est un outil de modélisation très riche. Elle trouve des applications en Philosophie, Biologie, Informatique et Physique théorique, parmi d'autres.

L'histoire que l'on raconte fait partie d'un champ de recherche contemporain, qui est celui de la *catégorification*. En mathématiques, la première structure algébrique introduite aux enfants et celle des entiers naturel, qui constitue une première abstraction du monde observé. Le nombre 3 est ainsi employé pour designer un concept, plus général; celui d'avoir trois "choses". On saurait reconnaître *trois* pommes, *trois* craies, ou de nombreux autres groupement de *trois* objets identifiables par un trait commun. En ce sens 3 est une abstraction pour les collections à trois éléments. Les entiers naturels sont très pratiques pour faire de l'arithmétique, sommer des quantités. Ou dans notre cas, des cardinalités. Ce qu'il faut noter ici est qu'il y a eu une perte d'information lors de cette abstraction. L'action de sommer deux pommes et une orange pour obtenir trois fruits, que le mathématicien se contentera de représenter par l'équation $2 + 1 = 3$, est en fait le calcul du *nombre* de fruits. Autrement dit, l'opération effectuée est

$$\{\mathsf{Pomme}_1, \mathsf{Pomme}_2\}, \{\mathsf{Orange}\} \mapsto \{\mathsf{Pomme}_1, \mathsf{Pomme}_2\} + \{\mathsf{Orange}\} = \{\mathsf{Pomme}_1, \mathsf{Pomme}_2, \mathsf{Orange}\}$$

(où ici, + désigne l'union disjointe.) De manière générale, pour A, B deux collections finies, on a $|A + B| = |A| + |B|$ (où $|\cdot|$ désigne le cardinal). Les algébristes diront que $|\cdot|$ est un morphisme pour $+$ et lors de l'opération précédente, tout à été passé sous le filtre de $|\cdot|$. L'idée de la catégorification est de tenter de remédier à l'abstraction en reconstruisant des ensembles, ou d'autres structures algébriques plus riches telles que des catégories. Par exemple, en combinatoire, il est courant de donner des *preuves bijectives* d'égalités arithmétiques. Une instance bien connue des taupins correspond à l'*identité de* WANDERMONDE:

$$\binom{p+q}{n} = \sum_{i+j=n} \binom{p}{i}\binom{q}{j}$$

Cette identité peut se démontrer en interprétant $\binom{m}{k}$ comme le nombre de façon de choisir k éléments parmi n. L'identité se reformule alors ainsi:

choisir n éléments parmi $p + q$, c'est en choisir i parmi les p premiers, et $j = n - i$ parmi les q derniers, pour un certain $i \leq n$.

On a remplacé les nombres par les cardinaux de certains ensembles, et on a raisonné avec plus de structure. Puis on est retourné dans le monde des nombres pour obtenir une équation. On peut voir l'identité de WANDERMONDE comme une "trace" numérique du fait combinatoire évoqué dans notre preuve bijective. Par exemple, on peut voir la commutativité de l'addition entre entiers comme une conséquence de la commutativité *à isomorphisme près* de la somme de deux ensembles, et de même pour son associativité. L'idée est qu'il existe une algèbre formée par les ensembles finis, généralisant $\mathbb{N}$, où les opérations vérifient des relations de cohérence à isomorphisme près.

Je prend désormais un peu de hauteur et suppose que le lecteur connais la notion de catégorie. Notons **FinSet** la catégorie des ensembles finis, $\mathbb{0}$ l'ensemble vide et $\mathbb{1}$ le singleton $*$. On a alors des opérations

$$\begin{array}{rcl} + : \mathbf{FinSet} \times \mathbf{FinSet} & \to & \mathbf{FinSet} \\ A, B & \mapsto & A + B \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \times : \mathbf{FinSet} \times \mathbf{FinSet} & \to & \mathbf{FinSet} \\ A, B & \mapsto & A \times B \end{array}$$

Vérifiant les relations

$$\mathbb{0} + A \simeq A \qquad \mathbb{1} \times A \simeq A \qquad \mathbb{0} \times A \simeq \mathbb{0}$$

$$(A + B) + C \simeq A + (B + C) \qquad (A \times B) \times C \simeq A \times (B \times C)$$

$$A + B \simeq B + A \qquad A \times B \simeq B \times A$$

$$A \times (B + C) \simeq A \times B + A \times C$$

On dit que **FinSet** est une *catégorie en semi-anneau commutatif*, ou encore une *catégorie bimonoïdale symmetrique*. C'est notre premier exemple de catégorification: celui de l'ensemble $\mathbb{N}$ en la catégorie **FinSet**.

2 Cardinalité des groupoïdes

Comme nous venons de le décrire, on sait passer des ensembles aux entiers naturels via le cardinal. On pourrait de même vouloir interpréter certaines égalitées entre réels comme des relations entre des structures plus riches, et de fait il existe une façon de le faire pour les réels positifs. Le prix à payer est de passer des ensembles aux groupoïdes. On peut alors compter les éléments "à isomorphismes près", i.e. en quotientant par le nombre de symmetries.

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] & \bullet \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[rr] & & \bullet \\ & \bullet \arrow[loop above] & \end{tikzcd}$$

$\mathcal{G}_1$ $\qquad\qquad$ $\mathcal{G}_2$

Le groupoïde $\mathcal{G}_1$ ci-dessus aura donc un cardinal de 2, et le groupoïde $\mathcal{G}_2$ un cardinal $3/2$.

2.1 Rappel. Un *groupoïde* est une catégorie où toutes les flèches sont inversibles. Étant donné un groupoïde $\mathcal{G}$, on note $\pi_0(\mathcal{G})$ l'ensemble des ses composantes connexes, i.e. des classes d'isomorphisme de ses objets. Pour $x \in \mathcal{G}$, on note $[x] \in \mathcal{G}$ sa classe d'isomorphisme.

Question 2.2

Étant donné $x \in \mathcal{G}$, on note $\mathsf{Aut}(x) := \mathsf{Hom}(x, x)$, vérifier que si $x \simeq y$ dans $\mathcal{G}$, alors $\mathsf{Aut}(x) \simeq \mathsf{Aut}(y)$.

Definition 2.3 : Cardinal d'un groupoïde

Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde, le *cardinal* de $\mathcal{G}$, noté $|\mathcal{G}|$ est défini comme

$$|\mathcal{G}| := \sum_{[x]\in\mathcal{G}} \frac{1}{|\mathsf{Aut}(x)|}$$

Si $|\mathsf{Aut}(x)| = \infty$, on prend la convention $|\mathsf{Aut}(x)|^{-1} = 0$. Si cette somme est divergente, on note $|\mathcal{G}| = \infty$, et on dit que le groupoïde $\mathcal{G}$ est *modéré* lorsque $|\mathcal{G}| < \infty$.

Question 2.4

Vérifier les fait suivants:

(i) Si A est un ensemble, que l'on voit comme un groupoïde discret dont les seuls morphismes sont les identités, son cardinal en tant qu'ensemble est son cardinal en tant que groupoïde. (si A est un ensemble infini, on considère que son cardinal en temps qu'ensemble est ∞.)

(ii) Si $\mathcal{G} \simeq \mathcal{H}$ sont deux groupoïdes équivalents (au sens d'une équivalence de catégorie), $|\mathcal{G}| = |\mathcal{H}|$.

(iii) Si $\mathcal{E}$ désigne la catégorie des ensembles finis, ou les morphismes sont les isomorphismes entre ensembles (on dis que $\mathcal{E}$ est le *cœur* de **FinSet**), $|\mathcal{E}| = e = 2.71\ldots$

2.5 rappel. Etant donné $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux groupoïdes, on note $\mathcal{G} + \mathcal{H}$ leur somme disjointe, et $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ leur produit (en tant que catégorie). Plus généralement pour une famille $(\mathcal{G}_\lambda)$ de groupoïdes indexés par un ensemble Λ, on définit $\sum_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{G}_\lambda$ le coproduit des $\mathcal{G}_\lambda$ et $\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{G}_\lambda$ leur produit.

Question 2.6

Soit $(\mathcal{G}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de groupoïdes, on a:

$$\left|\sum_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{G}_\lambda\right| = \sum_{\lambda\in\Lambda}|\mathcal{G}_\lambda| \qquad \text{et} \qquad \left|\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{G}_\lambda\right| = \prod_{\lambda\in\Lambda}|\mathcal{G}_\lambda|$$

où on a pris la convention $0\times\infty = 0$.

Definition 2.7 : quotient faible

Soit X un ensemble muni d'une G-action pour G un groupe. On note $X/\!/G$ le *quotient faible* de X par G, qui est un groupoïde, défini de la façon suivante :

- Les objets de $X/\!/G$ sont les $x \in X$.
- les flèches de $X/\!/G$ sont les $g : x \to y$ pour $g \in G$ tel que $g \cdot x = y$. L'identité $1_x : x \to x$ est donnée par le neutre e de G, et la composition est donnée par le produit de G.

On a un foncteur canonique $X/\!/G \to \mathbf{B}G$ où $\mathbf{B}G$ est la catégorie à un élément $\bullet$, avec $\mathrm{Aut}(\bullet) = G$.

Question 2.8

Si X est un ensemble fini muni d'une G-action (pour G un groupe arbitraire),
vérifier que $|X/\!/G| = |X|/|G|$. (Avec la convention $n/\infty = 0$.)

Question 2.9

Si X est un ensemble d'une G-action, vérifier que $\pi : X/\!/G \to G$ est fidèle. À quelle condition sur $X/\!/G$ l'action est-elle transitive ? libre ? Dans chacun de ces cas, simplifier l'identité obtenue en Question 2.8.

Question 2.10 : bonus

Si $\mathcal{X}$ est un groupoïde, G un groupe et $\pi : \mathcal{X} \to \mathbf{B}G$ un foncteur, quelle est la CNS pour que $\mathcal{X}$ et π proviennent d'une G-action ? (*Indication : fibration discrète.*)

3 Relations et Travées

Dans cette section, on part de la notion de relation entre deux ensembles, et on la catégorifie en une notion plus générale de travée entre deux groupoïdes. Prenons par exemple la relation

$$S: \text{ dans l'espace euclidien } \mathbb{R}^3, \text{ le point } x \text{ et la droite } d \text{ se trouvent sur un plan commun }.$$

En terme de valeurs de vérité, ce n'est pas une relation très intéressantes, mais notez qu'on peut formaliser la relation S comme suit:
on note $(S) := \{(x, P, d)$ où x est un point, d une droite, et P un plan commun aux deux $\}$.
On a alors deux projections

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "\pi_2"'] \arrow[dr, "\pi_1"] & \\ \mathbb{PR}^2 & & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

et S peut être vu comme l'ensemble des "preuves" que certains points x et certaines droites d satifont à (S).
Plus précisémment, x et d sont en relation pour S si on trouve $s \in S$ tel que $\pi_1(s) = x$ et $\pi_2(s) = d$.

Definition 3.1 : Travée

Soit $\mathcal{C}$ un catégorie et X, Y deux objets de $\mathcal{C}$, une *travée* entre X et Y est la donnée d'un objet S de $\mathcal{C}$ muni de deux flèches $Y \leftarrow S \rightarrow X$.

Question 3.2

Soit $R \subseteq X \times Y$ une relation entre deux ensembles X et Y. Donner une travée $Y \overset{q}{\leftarrow} S \overset{p}{\rightarrow} X$ telle que

$$x \, R \, y \iff \exists s \in S,\ p(s) = x \wedge q(s) = y$$

Definition 3.3

Si $Y \overset{q}{\leftarrow} S \overset{p}{\rightarrow} X$ est une travée entre deux ensembles, on note $\underline{S}$ (avec un abus de notation) la relation définie par

$$x \, \underline{S} \, y \iff \exists s \in S,\ p(s) = x \wedge q(s) = y$$

Question 3.4

Si on a deux travées

$$\begin{tikzcd}
& T \arrow[dl, "q_T"'] \arrow[dr, "p_T"] & & S \arrow[dl, "q_S"'] \arrow[dr, "p_S"] & \\
Z & & Y & & X
\end{tikzcd}$$

on peut construire leur pullback

$$\begin{tikzcd}
& & TS \arrow[dl, "\pi_2"'] \arrow[dr, "\pi_1"] \arrow[dll, bend right, "q_{TS}"'] \arrow[drr, bend left, "p_{TS}"] \arrow[dd, phantom, "\lrcorner" rotate=-45, very near start] & & \\
& T \arrow[dl, "q_T"'] \arrow[dr, "p_T"] & & S \arrow[dl, "q_S"'] \arrow[dr, "p_S"] & \\
Z & & Y & & X
\end{tikzcd}$$

ce qui donne encore une travée entre X et Z.
Vérifier que $\underline{T} \circ \underline{S} = \underline{TS}$. Où la composée à gauche correspond à la composition usuelle des relations.

Question 3.5

On considère la travée $V \overset{q}{\leftarrow} A \overset{p}{\rightarrow} V$ où V est l'ensemble des humains sur terre, A est l'ensemble des paires de gens (y, x) tel que x est ami avec y, et p, q sont respectivement la première et seconde projection. Etant donnés $z, x \in V$, à quoi correspond la fibre de $q_{A^2} \times p_{A^2} : A^2 \rightarrow V \times V$ au dessus de (z, x) ?
Plus généralement, si G est un graphe, A l'ensemble des triplets (w, e, v) où e est un arc de v à w dans G, V l'ensemble des sommets de G et $p : (w, e, v) \mapsto v$, $q : (w, e, v) \mapsto w$, à quoi correspond le cardinal de la fibre de A^k au dessus d'une paire de sommets (v, w) ?

Lors de la Question 3.5, on a interprété les matrices d'entiers comme des travées entre des groupoïdes. Mais on peut faire mieux ! En utilisant la partie 2, on peut interpréter les matrices à coefficients réels positifs, quitte à remplacer les ensembles par des groupoïdes.

4 Groupoïdes vectoriels, travées linéaires

Reprenons notre exemple de travées donnée au début de la section 3. On sait que le groupe $\mathsf{Iso}(\mathbb{R}^3)$ des isométries affines de $\mathbb{R}^3$ agit sur S, $\mathbb{PR}^2$, et $\mathbb{R}^3$. De plus, les applications π_1 et π_2 sont équivariantes pour l'action de $\mathsf{Iso}(\mathbb{R}^3)$. On peut donc promouvoir cette travée en une travée de groupoïdes, via la construction du quotient faible :

$$\begin{tikzcd} & S/\!/\mathsf{Iso}(\mathbb{R}^3) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathbb{PR}^2/\!/\mathsf{Iso}(\mathbb{R}^3) & & \mathbb{R}^3/\!/\mathsf{Iso}(\mathbb{R}^3) \end{tikzcd}$$

Dans ce qui suit, on va voir comment interpréter un tel objet comme une application linéaire entre $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. L'idée est qu'étant donné une travée

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{S} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathcal{H} & & \mathcal{G} \end{tikzcd}$$

On veut l'interpreter comme une application linéaire

$$V(\mathcal{H}) \xleftarrow{\hat{S}} V(\mathcal{G})$$

Puisque les vecteurs de $V(\mathcal{G})$ se décrivent comme des applications linéaires $\mathbb{R} \to \mathcal{G}$, si on souhaite interpréter le groupoïde terminal $\mathbb{1}$ comme l'espace des scalaires $\mathbb{R}$, on peut voir les vecteurs de $V(\mathbb{G})$ comme des travées

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{V} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathcal{G} & & \mathbb{1} \end{tikzcd}$$

i.e. comme une catégorie $\mathcal{V}$ munie d'un foncteur vers $\mathcal{G}$. Notons qu'on a une notion naturelle de composition pour les travées, donnée par le *pullback faible*. Qui est une sorte de pullback a homotopie près.

Definition 4.1 : pullback faible

Etant donné un diagramme de la forme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T} \arrow[dr, "p"] & & \mathcal{S} \arrow[dl, "q"'] \\ & \mathcal{G} & \end{tikzcd}$$

dans la catégorie des groupoïdes, on définit son *pullback faible* $\mathcal{T}\ {}_p\!\times_q \mathcal{S}$ comme le groupoïde dont les objets sont les triplet (t, u, s) avec $t \in \mathcal{T}$, $s \in \mathcal{S}$ et $u : p(t) \to q(s)$ dans $\mathcal{G}$. Les morphismes sont donnés par les paires $(\alpha, \beta) : (t, u, s) \to (t', v, s')$ tels que $\alpha : t \to t'$, $\beta : s \to s'$ et le carré suivant commute :

$$\begin{tikzcd} p(t) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p(\alpha)"'] & q(s) \arrow[d, "q(\beta)"] \\ p(t') \arrow[r, "v"] & q(s') \end{tikzcd}$$

On a deux foncteurs de projections $\pi_1 : \mathcal{T}\ {}_p\!\times_q \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ et $\pi_2 : \mathcal{T}\ {}_p\!\times_q \mathcal{S} \to \mathcal{T}$.

Etant donnés deux travées $\mathcal{H} \leftarrow \mathcal{S} \to \mathcal{G}$ et $\mathcal{K} \leftarrow \mathcal{T} \to \mathcal{H}$ on peut donc les composer en $\mathcal{TS} := \mathcal{T}\ {}_p\!\times_q \mathcal{S}$. On admet que c'est une construction associative à isomorphisme près (dans la catégorie des travées, que l'on ne décrit pas.)

Question 4.2

Vérifier que la Definition 4.1 définie bien un groupoïde.

Question 4.3

Déduire de la définition de composition de deux travées l'analogue pour une travée $\mathcal{H} \leftarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{G}$ et un groupoïde $v : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{G}$ au dessus de $\mathcal{G}$ de l'application de $\mathcal{S}$ à $\mathcal{V}$, notée $\mathcal{S}v$, qui est un groupoïde au dessus de $\mathcal{H}$.

On explique maintenant comment interpréter cela en termes d'espaces vectoriels

Definition 4.4 : Espace vectoriel $V(\mathcal{G})$

Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde, on définit

$$V(\mathcal{G}) := \mathbb{R}^{\pi_0(\mathcal{G})}$$

le $\mathbb{R}$-espace vectoriel associé.
On dit qu'un groupoïde $v : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{G}$ au dessus de $\mathcal{G}$ est *modéré* si pour tout $x \in \mathcal{G}$, $v^{-1}(x)$ est modéré, où $v^{-1}(x)$ désigne le sous-groupoïde plein de $\mathcal{V}$ dont les objets sont les éléments $a \in \mathcal{V}$ tels que $v(a) \simeq x$ dans $\mathcal{G}$.
On interprète un groupoïde $v : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{G}$ modéré comme le vecteur

$$\hat{v} := \sum_{[x] \in \pi_0(\mathcal{G})} |v^{-1}(x)| \cdot [x]$$

On notera aussi par abus $\widehat{\mathcal{V}}$ au lieu de $\hat{v}$.

Question 4.5

Vérifier que pour les définitions usuelles de somme et produits dans la catégorie des groupoïdes, on a

(i) Etant donné une famille de groupoïdes modérés $v_\lambda : \mathcal{V}\lambda \rightarrow \mathcal{G}$ au dessus de $\mathcal{G}$, si leur somme $\sum_{\lambda \in \Lambda} v_\lambda : \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{V}_\lambda \rightarrow \mathcal{G}$ est modérée, alors on a

$$\widehat{\sum_{\lambda \in \Lambda} v_\lambda} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \widehat{v_\lambda}$$

où la somme à droite converge ponctuellement.

(ii) Etant donné un groupoïde modéré $\mathcal{X}$ et un groupoïde modéré $v : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{G}$ au dessus de $\mathcal{G}$, on a un groupoïde $\mathcal{X} \cdot v := \mathcal{X} \times \mathcal{V} \xrightarrow{1 \times v} \mathcal{G}$ au dessus de $\mathcal{G}$, qui est encore modéré. De plus,

$$\widehat{\mathcal{X} \times v} = |\mathcal{X}| \cdot \hat{v}$$

Definition 4.6 : Travée modérée

Une travée de groupoïdes $\mathcal{H} \overset{q}{\leftarrow} \mathcal{S} \overset{p}{\rightarrow} \mathcal{G}$ est dite *modérée* si :

- Pour tout $h \in \mathcal{H}$, le groupoïde $p^{-1}(g) \cap q^{-1}(h)$ est vide pour presque tout $g \in \mathcal{G}$.
- Pour tout $g \in \mathcal{G}$ et $h \in \mathcal{H}$, le groupoïde $p^{-1}(g) \cap q^{-1}(h)$ est modéré.

Question 4.7

Montrer qu'étant donné une travée modérée $\mathcal{H} \overset{q}{\leftarrow} \mathcal{S} \overset{p}{\rightarrow} \mathcal{G}$, il existe un unique opérateur linéaire $\hat{\mathcal{S}} : V(\mathcal{G}) \to V(\mathcal{H})$ tel que pour tout groupoïde modéré $v : \mathcal{V} \to \mathcal{G}$ au dessus de $\mathcal{G}$, on ait $\hat{\mathcal{S}}\hat{v} = \widehat{\mathcal{S}v}$. De plus, le coefficient $([h], [g])$ de $\hat{\mathcal{S}}$ (dans les bases canoniques de $V(\mathcal{H})$ et $V(\mathcal{G})$) est donné par :

$$\hat{\mathcal{S}}_{[h],[g]} = \sum_{[s] \in p^{-1}([g]) \cap q^{-1}([h])} \frac{|\mathsf{Aut}([x])|}{|\mathsf{Aut}([s])|}$$

Etant donnés deux travées $\mathcal{H} \leftarrow \mathcal{S} \to \mathcal{G}$ et $\mathcal{H} \leftarrow \mathcal{T} \to \mathcal{G}$ on peut les sommer en $\mathcal{S} + \mathcal{T}$:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{S}+\mathcal{T} \arrow[dl, "q_{\mathcal{S}}+q_{\mathcal{T}}"'] \arrow[dr, "p_{\mathcal{S}}+p_{\mathcal{T}}"] & \\ \mathcal{H} & & \mathcal{G} \end{tikzcd}$$

On admet que c'est une construction associative, commutative et bilinéaire à isomorphisme près, et que $\widehat{\mathcal{S}+\mathcal{T}} = \hat{\mathcal{S}} + \hat{\mathcal{T}}$ lorsque $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont modérées.

On peut montrer que toutes les opérations faites sur les groupoïdes descendent via $V(\cdot)$ et $\hat{}$ en des opérations usuelles entre espaces vectoriels.

On note aussi les constructions suivantes:

Definition 4.8 : $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Soient $v : \mathcal{V} \to \mathcal{G}$ et $w : \mathcal{W} \to \mathcal{G}$ deux groupoïdes au dessus de $\mathcal{G}$, on définit leur *produit scalaire* $\langle v, w \rangle$ comme le pullback faible:

$$\begin{tikzcd} & \langle v, w \rangle \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, phantom, "\vee"] & \\ \mathcal{V} \arrow[dr, "v"] & & \mathcal{W} \arrow[dl, "w"'] \\ & \mathcal{G} & \end{tikzcd}$$

qui est un groupoïde (mais n'est pas canoniquement fibré au dessus de $\mathcal{G}$, car le carré ci-dessus ne commute qu'à isomorphisme près dans $\mathcal{G}$.)

Definition 4.9 : $\mathcal{S}^*$

Etant donné une travée $\mathcal{H} \overset{q}{\leftarrow} \mathcal{S} \overset{p}{\rightarrow} \mathcal{G}$ on définit sa *conjuguée* comme

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{S} \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ \mathcal{G} & & \mathcal{H} \end{tikzcd}$$

On a alors les propriétés

- $|\langle v, w \rangle| = \langle \hat{v}, \hat{w} \rangle$ lorsque v et w sont modérés.
- $\widehat{\mathcal{S}^*} = \hat{\mathcal{S}}^*$ lorsque $\hat{\mathcal{S}}$ est modéré.
- $\langle v, \mathcal{S}w \rangle \simeq \langle \mathcal{S}^* v, w \rangle$.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire à isomorphisme près.

5 Diagrammes à la Feynman

Une remarquable application de ce processus de groupoïdification, que l'on doit notamment à John C. Baez Alexander E. Hoffnung et Christopher D. Walker, est celle de pouvoir encoder et illustrer la combinatoire des diagrammes de Feynman. (Et plus généralement, la catégorification est une des méthodes utilisées pour attaquer le problème de la quantification.)

Definition 5.1 : Espace de Fock

On définit l'espace de Fock comme l'espace des séries formelles de carré sommable dans $\mathbb{R}[[z]]$, muni du produit scalaire

$$\langle z^n, z^m\rangle := n! \cdot \delta_{n,m}$$

En pratique, l'espace de Fock utilisé en physique est sur le corps des complexes $\mathbb{C}$, mais nous n'avons pas d'outils à notre disposition pour catégorifier des nombres complexes. On se restreint donc à une version réelle du problème.

L'idée dans ce qui suit est de remplacer les entiers $n \in \mathbb{N}$ par les ensembles finis $\langle n\rangle \in \mathcal{E}$.

Question 5.2

Soit Ψ_n le groupoïde dont les objets sont les ensembles à n éléments, et dont les morphismes sont les bijections entre ensemble. Vérifier que $\Psi_n \simeq \mathbf{B}\mathfrak{S}_n$.
On note z^n le vecteur de base $[\langle n\rangle]$ dans $\mathcal{E}$ où $\langle n\rangle$ désigne l'ensemble $[\![1, n]\!]$. Vérifier que le foncteur d'inclusion $\psi_n : \Psi_n \hookrightarrow \mathcal{E}$ s'interprète comme le vecteur $\widehat{\psi_n} = \frac{z^n}{n!}$. Quel est le groupoïde $\langle \psi_m, \psi_n\rangle$? Quel est son cardinal ?

Definition 5.3 : a, a^*

Sur l'espace de Fock, on définit deux opérateurs linéaires a et a^*, comme suit:

$$a : \psi(z) \mapsto \frac{d\psi}{dz} \qquad\qquad a^* : \psi \mapsto z\psi$$

Question 5.4

Vérifier que a et a^* sont conjugués, et que l'on a la relation de commutation

$$aa^* = a^*a + \mathsf{id}$$

En physique, l'opérateur a^* est appelé *opérateur de création*, et on l'interprète comme l'opérateur qui ajoute une particule au système décrit par le vecteur d'état ψ. De même, a est appelé *opérateur d'annihilation* et s'interprète comme l'opérateur qui retire une particule du système. On définit aussi un *opérateur de champ* $\phi := a + a^*$. Un problème important en physique est de determiner les coefficients $\langle \psi_m, \phi^k \cdot \psi_n\rangle$ qui gouvernent les probabilités d'observer certaines intéractions entre des particules.

Definition 5.5 : $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^*$

On définit un opérateur $\mathcal{A}$ d'annihilation pour notre version groupoïdifiée de l'espace de Fock comme la travée :

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{A} := \mathcal{E} \arrow[dl, "\mathsf{id}"'] \arrow[dr, "X \mapsto X + \langle 1\rangle"] & \\ \mathcal{E} & & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

Et $\mathcal{A}^*$ comme son conjugué au sens de la section précédente.

Question 5.6

Vérifier que $\hat{A} = a$ et $\widehat{A^*} = a^*$ Vérifier qu'on a la relation de commutation

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* \simeq \mathcal{A}^*\mathcal{A} + \mathsf{id}$$

Question 5.7

On pose $\Phi := \mathcal{A} + \mathcal{A}^*$, à quoi correspond le groupoïde Φ ? Vérifier qu'il est isomorphe au groupoïde dont les objets sont les triplets $(m, \mathfrak{p}, n)$ où $n, m \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{p} \in \{+, -\}$ et $\mathfrak{p} = +$ ssi $m = n + 1$, et $\mathfrak{p} = -$ ssi $m = n - 1$. Et où les seuls morphismes sont les groupes d'automorphismes de ces triplets, tels que

$$\mathsf{Aut}((m, \mathfrak{p}, n)) = \begin{cases} \mathfrak{S}_n \text{ si } \mathfrak{p} = + \\ \mathfrak{S}_{n-1} \text{ si } \mathfrak{p} = - \end{cases}$$

Question 5.8

A quoi correspond le groupoïde Φ^n ? (On peut se contenter de répondre intuitivement, et on fera attention au fait que les pullbacks sont *faibles*).

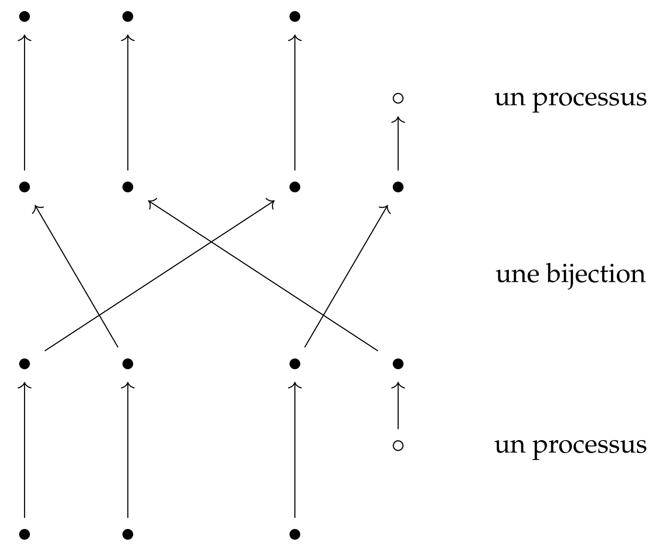
Sous la description (squelettique) de Φ donnée en Question 5.7, on dessine l'objet $(m, \mathfrak{p}, n)$ comme

où il y a n sommets en bas et m en haut, lorsque $\mathfrak{p} = -$. On le dessine comme

où il y a n sommets en bas et m en haut, lorsque $\mathfrak{p} = -$. On pense à un tel objet comme un "processus" permettant de passer de l'état "n particules" à l'état "m particules".

Question 5.9

Expliquer pourquoi Φ^2 s'interprète comme le groupoïde dont les objets sont les desins du type



où il y a n sommets en bas et m en haut. Plus généralement, on admet que cette interprétation s'étend aux objets de Φ^k pour un certain k, où l'on effectue k processus, et on s'autorise des bijections entre chaque. A quoi correspondent les automorphismes des objets de Φ^2 dans l'interpetation ci-dessus ?

Question 5.10

Que vaut le coefficient $\langle \frac{z^n}{n!}, \phi^2 \cdot \frac{z^n}{n!} \rangle$ dans l'algèbre de Fock ?
A quoi correspond le groupoïde $\langle \psi^n, \Phi^2 \psi^n \rangle$? Quel est son cardinal ?.

De manière générale, on peut dénombrer des graphes à isomomorphismes près, et compter leurs symmetries pour calculer des coefficients du type $\langle \psi^m, \Phi^k \psi^n \rangle$. En fait c'est ce que font (avec beaucoup plus de parmaètres...) les physiciens qui utilisent les diagrammes de Feynman !

On peut aussi appliquer la groupoïdification à l'étude des algèbres de Hecke, des algèbres de Hall quantifiées, et pobablement d'autres sujets...

References

[1] *Le nLab; encyclopédie en ligne des catégories supérieures*. https://ncatlab.org/nlab/show/groupoidification.

[2] *John Baez's stuff: Blog post on groupoidification*, 2009. https://math.ucr.edu/home/baez/groupoidification/.

[3] J. C. Baez and J. Dolan, *From finite sets to feynman diagrams*, 2000. https://arxiv.org/abs/math/0004133.

[4] J. C. Baez, A. E. Hoffnung, and C. D. Walker, *Higher-dimensional algebra* VII*: Groupoidification*, 2010. https://arxiv.org/abs/0908.4305.

[5] S. Byrne, *On groupoids and stuff*, 2005. https://math.ucr.edu/home/baez/qg-spring2004/ByrneHons.pdf.

[6] J. Morton, *Categorified algebra and quantum mechanics*, 2006. https://arxiv.org/abs/math/0601458.